page 58 1/5

ENS CACHAN B' (T)

Durée : 4 heures.

Dans tout le problème n est un entier strictement positif fixé et x un réel appartenant à $[0,1]$. On note R l'ensemble des réels.

On désigne par $P_{n,k}$ $(0 \leq k \leq n)$, la fonction polynôme de degré n définie sur $[0,1]$ par

$$P_{n,k}(x) = \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Le but du problème est d'étudier ces fonctions polynômes connues sous le nom de polynômes de Bernstein, et plus particulièrement leur lien avec l'approximation des fonctions continues.

PARTIE I

1. Montrer que
   a) $\sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x) = 1$.
   b) $\sum_{k=0}^{n} k P_{n,k}(x) = nx$.
   c) $\sum_{k=0}^{n} k(k-1) P_{n,k}(x) = n(n-1)x^2$.
   d) $\sum_{k=0}^{n} (nx-k)^2 P_{n,k}(x) = nx(1-x)$.

2. Montrer que

$$\left\{ \sum_{k=0}^{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| P_{n,k}(x) \right\}^2 \leq \sum_{k=0}^{n} (x - \frac{k}{n})^2 P_{n,k}(x).$$

On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3. On note T_i (i entier strictement positif) la fonction polynôme définie pour $0 \leq x \leq 1$ par $T_i(x) = \sum_{k=0}^{n} (nx-k)^i P_{n,k}(x)$.
   a) Montrer que $T_2(x) \leq \frac{n}{4}$.
   b) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| P_{n,k}(x) \leq \frac{1}{\sqrt{4n}}.$$

   c) Montrer que

$$x(1-x)T_i'(x) = inx(1-x)T_{i-1}(x) - T_{i+1}(x).$$

   d) Montrer que $T_i(x)$ est un polynôme en n et un polynôme en x.
   Montrer que les fonctions $T_i, 3 \leq i \leq 6$ sont des polynômes en n de degré respectivement 1 (pour $i = 3$), 2 ($i = 4$), inférieur ou égal à 2 ($i = 5$) et 3 ($i = 6$). En déduire qu'il existe une constante C telle que $|T_6(x)| \leq Cn^3$.
   e) On note $\Gamma(n,x)$ l'ensemble des entiers $k, 0 \leq k \leq n$ tels que

$$\left| n^{-\frac{3}{4}} (k - nx) \right| \geq 1.$$

Tournez la page S.V.P.

Montrer que $\sum_{k\in\Gamma(n,x)} P_{n,k}(x) \leq n^{-\frac{9}{2}} T_6(x)$.

4. On se donne un réel strictement positif δ. On note $\Delta(n,x\ ;\ \delta)$ l'ensemble des entiers k tels que $0 \leq k \leq n$ et $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta$. (On ne cherchera pas à déterminer explicitement $\Delta(n,x\ ;\ \delta)$).

a) Montrer que

$$\sum_{k\in\Delta(n,x\ ;\ \delta)} P_{n,k}(x) \leq \sum_{k\in\Delta(n,x\ ;\ \delta)} \left(\frac{\frac{k}{n} - x}{\delta}\right)^2 P_{n,k}(x).$$

b) En déduire, en utilisant 3a. que

$$\sum_{k\in\Delta(n,x\ ;\ \delta)} P_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

PARTIE II

Les résultats de la partie II ne sont utilisés qu'en III.4.
Dans toute cette partie, f désigne une fonction continue de $[0,1]$ dans R.
On définit la fonction ω qui à tout $\delta > 0$ associe

$$\omega(\delta) = \max\{|f(x) - f(y)|\ ;\ x \in [0,1]\ ;\ y \in [0,1]\ ;\ |x-y| \leq \delta\}.$$

On appelle ω le module de continuité de f.

1. Déterminer ω dans les cas suivants :
   a) $f(x) = 1 \quad \forall x \in [0,1]$;
   b) $f(x) = x \quad \forall x \in [0,1]$.

2. Vérifier que ω est une fonction croissante.

3. Soit f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par
   $f_n(x) = 2nx$, pour $0 \leq x \leq \frac{1}{2n}$,
   $f_n(x) = 2 - 2nx$, pour $\frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n}$,
   $f_n(x) = 0$, pour $x \geq \frac{1}{n}$,
   et soit ω_n son module de continuité. Montrer que $\omega_n(n^{-\frac{1}{2}}) = 1$.

4. On fixe un réel strictement positif δ.
On définit des fonctions λ et η de deux variables par

$$\lambda(x,y\ ;\ \delta) = E\left[\frac{|x-y|}{\delta}\right] \quad \text{et} \quad \eta(x,y\ ;\ \delta) = \frac{|x-y|}{\lambda(x,y\ ;\ \delta)+1}$$

où $E[x]$ est la partie entière de x.

a) Montrer en partageant l'intervalle $[x,y]$ en $\lambda(x,y\ ;\ \delta)+1$ intervalles de longueur $\eta(x,y\ ;\ \delta)$ que

$$|f(x) - f(y)| \leq \{\lambda(x,y\ ;\ \delta)+1\}\omega(\eta(x,y\ ;\ \delta)),$$

ENS CACHAN B' (T)

où ω est le module de continuité de f.
b) En déduire que

$$|f(x) - f(y)| \leq \{\lambda(x, y\ ;\ \delta) + 1\}\,\omega(\delta).$$

PARTIE III

Dans cette partie f désigne une fonction continue définie sur $[0,1]$ à valeurs réelles. On lui associe une fonction polynôme de degré n, soit $B_n(f)$, définie sur $[0,1]$ par

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}(x).$$

1.
a) Montrer que l'application $f \to B_n(f)$ est linéaire.
b) Calculer $B_n(f)$ pour $f(x) = x^2$.
c) Montrer que si $m \leq f(x) \leq M$, on a aussi $m \leq B_n(f)(x) \leq M$.
d) Calculer $B_n(f_n)$ où f_n est définie en II.4.

2. Soit M un majorant de $|f|$. On se donne $\epsilon > 0$ et on lui associe δ tel que $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.
a) Montrer que

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \sum_{k \notin \Delta(n,x\ ;\ \delta)} \left|f(x) - f(\frac{k}{n})\right| P_{n,k}(x) + 2M \sum_{k \in \Delta(n,x\ ;\ \delta)} P_{n,k}(x),$$

où $\Delta(n, x\ ;\ \delta)$ est défini en I.4.
b) Montrer que

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \epsilon + \frac{M}{2n\delta^2}.$$

3. Enoncer, à partir de ces résultats, un théorème concernant l'approximation des fonctions continues par des polynômes.

4. On reprend les notations de II.4.
a) Montrer que pour tout $\delta > 0$,

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \omega(\delta) \sum_{k=0}^{n} \left(1 + \lambda(x, \frac{k}{n}\ ;\ \delta)\right) P_{n,k}(x).$$

b) Vérifier que

$$\lambda(x, \frac{k}{n}\ ;\ \delta) \leq \frac{1}{\delta^2}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2.$$

c) En déduire

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \omega(\delta)\left(1 + \frac{1}{4n\delta^2}\right).$$

Tournez la page S.V.P.

ENS CACHAN B' (T)

d) En choisissant δ, montrer qu'il existe $C \leq \frac{5}{4}$ tel que

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq C\omega(n^{-\frac{1}{2}}).$$

e) Donner un minorant de C, en utilisant la fonction f_n de II.4.

5. Dans cette question, f désigne une fonction de classe C^2. On désire montrer que pour tout x_0 fixé

$$(*) \quad B_n(f)(x_0) = f(x_0) + \frac{1}{2n}x_0(1-x_0)f''(x_0) + o(\frac{1}{n}),$$

où $o(x)$ est une fonction telle que $\frac{o(x)}{x}$ tend vers zéro quand x tend vers zéro.

a) Montrer que (*) est vérifiée pour $f(x) = e^x$.

b) Montrer que, pour tout x_0 fixé

$$B_n(f)(x_0) = f(x_0) + \frac{1}{2n}x_0(1-x_0)f''(x_0) + \sum_{k=0}^{n}(\frac{k}{n} - x_0)^2\epsilon(\frac{k}{n})P_{n,k}(x_0)$$

où ϵ est une fonction bornée telle que $\epsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers x_0.

c) En utilisant notations et résultats de I.3, montrer qu'il existe une constante D telle que

$$\left| \sum_{k \in \Gamma(n,x_0)} (\frac{k}{n} - x_0)^2\epsilon(\frac{k}{n})P_{n,k}(x_0) \right| \leq \frac{AD}{n^{\frac{3}{2}}},$$

où $A = \sup_{0 \leq x \leq 1} |\epsilon(x)|\,(x - x_0)^2$.

d) On note $\alpha(n)$ le maximum de $|\epsilon(x)|$ sur $[x_0 - n^{-\frac{1}{4}}, x_0 + n^{-\frac{1}{4}}]$.
Montrer que

$$\sum_{k \notin \Gamma(n,x_0)} (\frac{k}{n} - x_0)^2\epsilon(\frac{k}{n})P_{n,k}(x_0) \leq \frac{\alpha(n)}{n^2}T_2(x_0).$$

e) En déduire que (*) est vérifiée.

PARTIE IV

On désigne par Δ l'opérateur qui à toute suite de réels $y = (y_i, i \geq 0)$ associe la suite de réels $\Delta y = ((\Delta y)_i, i \geq 0)$ définie par

$$(\Delta y)_i = y_{i+1} - y_i.$$

On définit par récurrence Δ^p en posant $\Delta^1 = \Delta$ et $\Delta^p y = \Delta(\Delta^{p-1}y)$, pour $p \geq 2$.

1.

a) Montrer que $(\Delta^2 y)_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$.

b) Calculer $(\Delta^3 y)_i$.

c) Montrer que $(\Delta^p y)_i = \sum_{j=0}^{p} \frac{p!}{j!\,(p-j)!}(-1)^{p-j}y_{i+j}$.

Dans toute la suite de cette partie, f est une fonction de R dans R de classe C^p.

ENS CACHAN B'(T)

2. Soit h un réel strictement positif et a un réel fixé.
On associe à f la suite $y = (y_i, i \geq 0)$ définie par $y_i = f(a + ih)$.
Le réel h étant fixé, on notera $\Delta^p f(a)$ le terme d'ordre 0 de la suite $\Delta^p y$, c'est à dire $\Delta^p f(a) = (\Delta^p y)_0$ et $\Delta^p f$ l'application qui à a associe $\Delta^p f(a)$.
a) Ecrire $\Delta^1 f(a)$ et $\Delta^2 f(a)$.
b) Ecrire $\Delta^p f(a)$ en utilisant 1.c.

3. Montrer par récurrence que pour tout entier p, il existe η tel que $\Delta^p f(a) = h^p f^{(p)}(\eta)$. On précisera à quel intervalle appartient η.

4. On désigne par $B^{(p)}_{n+p}(f)(x)$ la dérivée d'ordre p du polynôme $B_{n+p}(f)$.
Montrer que

$$B^{(p)}_{n+p}(f)(x) = (n+p)\,! \sum_{k=0}^{n+p} f\left(\frac{k}{n+p}\right) \sum_{j=0}^{p} \frac{x^{k-j}(1-x)^{n-k+j}}{(k-j)\,!\,(n-k+j)\,!}(-1)^{p-j}\frac{p\,!}{j\,!\,(p-j)\,!}$$

où les termes correspondant à des indices j tels que $k - j < 0$ ou $n + j - k < 0$ sont posés égaux à 0. En déduire que

$$B^{(p)}_{n+p}(f)(x) = (n+p)\,! \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k(1-x)^{n-k}}{k\,!\,(n-k)\,!} \sum_{j=0}^{p}(-1)^{p-j}\frac{p\,!}{j\,!\,(p-j)\,!} f\left(\frac{k+j}{n+p}\right).$$

5. Montrer que si $\Delta^p f$ est l'application définie en 2 pour $h = \frac{1}{n+p}$,

$$B^{(p)}_{n+p}(f)(x) = (n+p)\,! \sum_{k=0}^{n} \Delta^p f(\frac{k}{n+p})\frac{x^k(1-x)^{n-k}}{k\,!\,(n-k)\,!}.$$

6. On suppose f de classe C^p.
a) Montrer que

$$\Delta^p f(\frac{k}{n+p}) = \frac{1}{(n+p)^p} f^{(p)}(\eta_k)$$

où η_k appartient à l'intervalle $]\frac{k}{n+p}, \frac{k+p}{n+p}[$.
b) En déduire que

$$\frac{n\,!\,(n+p)^p}{(n+p)\,!} B^{(p)}_{n+p}(f)(x) = B_n\left(f^{(p)}\right)(x) + \sum_{k=0}^{n}\left\{f^{(p)}(\eta_k) - f^{(p)}(\frac{k}{n})\right\} P_{k,n}(x).$$

c) Montrer que $B^{(p)}_{n+p}(f)$ converge simplement vers $f^{(p)}$ quand n tend vers l'infini.
La convergence est-elle uniforme ?